Tag der Mathematik 2016

Mathematischer Wettbewerb, Klassenstufe 9–10

30. April 2016, 9.00–12.00 Uhr

Aufgabe 1 Der Mittelwert von 2016 (nicht unbedingt verschiedenen) natürlichen Zahlen zwischen 1 und 20 162 016 beträgt 2016. Wie groß kann die größte dieser Zahlen höchstens gewesen sein? Und wie lautet die Antwort, wenn die 2016 Zahlen alle verschieden sind?

Lösung. Wir nennen die größtmögliche Zahl x. Diese ist bei der ersten Frage bestimmt durch

$$(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{2015\ \text{mal}}+x)/2016 = 2016, \tag{1}$$

denn x ist größtmöglich, wenn die anderen Zahlen so klein wie möglich sind. Umstellen der Gleichung ergibt

$$x = 2016 \cdot 2016 - 2015 = 4\,062\,241,$$

und diese Zahl liegt auch unter der angegeben Grenze von 20 162 016.

Bei der zweiten Frage können wir nicht immer die 1 wählen, jetzt ist die Wahl $1, 2, \ldots, 2015$ optimal. Sei S ihre Summe:

$$S = 1 + 2 + \cdots + 2015.$$

Statt (1) ist jetzt

$$(S + x)/2016 = 2016 \tag{2}$$

zu lösen. Es ist

$$x = 2016 \cdot 2016 - S. \tag{3}$$

Um das konkret zu bestimmen, müssen wir S ausrechnen. Wir schreiben S dazu auf zwei Weisen:

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 2014 + 2015$$
$$S = 2015 + 2014 + 2013 + \cdots + 2 + 1$$

Addiert man diese Gleichungen, erhält man

$$2S = 2016 + 2016 + 2016 + \cdots + 2016 + 2016 = 2015 \cdot 2016$$

und

$$S = \frac{2015 \cdot 2016}{2} = 2\,031\,120.$$

In (3) eingesetzt, ergibt sich als Lösung

$$x = 4\,064\,256 - 2\,031\,120 = 2\,033\,136.$$

Übrigens zeigt die Berechnung von S, dass allgemein

$$1 + 2 + \cdots + N = \frac{N(N+1)}{2} \tag{$*$}$$

gilt.

Aufgabe 2 Gegeben ist eine Tafel mit 4×4 Feldern, in denen anfänglich die Zahl 0 steht. Man darf nun einen 2×2-Teilbereich aussuchen und in den Feldern des Teilbereichs die Zahlen um 1 erhöhen. Diese Operation darf man beliebig oft wiederholen; z.B. kann man nach vier Zügen

1	2	2	1
1	2	3	2
0	0	1	1
0	0	0	0

erhalten.

(a) Bestimmt, ob (und wenn ja, wie) man die folgenden Muster erreichen kann:

2	3	3	2
4	9	8	3
3	10	12	5
1	4	7	4

3	4	3	2
5	10	9	3
4	12	11	4
2	5	6	3

(b) Kann man ein Muster erreichen, in dem jede der Zahlen $1, \ldots, 16$ genau einmal auf der 4×4-Tafel vorkommt? Wenn ja, wie?

(c) Nun benutzen wir statt der 4×4-Tafel eine 2016×2016-Tafel. (Es werden nach wie vor 2×2-Teilbereiche ausgewählt.) Kann man ein Muster erreichen, in dem jede der Zahlen $1, \ldots, 2016^2$ genau einmal auf der 2016×2016-Tafel vorkommt? Wenn ja, wie?

(d) Beantwortet Teil (c), wenn 2016 durch 2015 bzw. 2014 ersetzt wird.

Lösung. (a) Um zu entscheiden, welche der Muster möglich sind, rechnen wir rückwärts. Wir starten mit der gegebenen Konfiguration, erniedrigen die Zahlen in einem 2×2-Teilbereich um 1 und versuchen, die „Null-Konfiguration“ zu erreichen. Beachte, dass die Reihenfolge der Schritte keine Rolle spielt.

Bei der linken Konfiguration kann man so vorgehen:

- Die Eckfelder gehören zu genau einem 2×2-Teilbereich; daher geben die Zahlen dort an, wie häufig der entsprechende Bereich verwendet werden muss. Zum Beispiel ist der linke obere 2×2-Teilbereich zweimal zu verwenden. Das führt uns zu

0	1	3	2
2	7	8	3
3	10	12	5
1	4	7	4

- Wiederhole diesen Schritt für die anderen drei Eckfelder:

0	1	1	0
2	7	6	1
2	9	8	1
0	3	3	0

- Ab jetzt dürfen keine Eckbereiche mehr benutzt werden. Wir betrachten jetzt die erste Zeile; die beiden Einsen dort werden durch Verwendung des oberen mittleren 2×2-Bereichs zu Nullen gemacht. Genauso können wir die letzte Zeile (dreimal mittleres unteres 2×2-Quadrat wählen) und die erste und letzte Spalte bearbeiten. Damit wird die Konfiguration auf

0	0	0	0
0	4	4	0
0	4	4	0
0	0	0	0

reduziert.

- Jetzt ist klar, dass nur noch viermal das mittlere 2×2-Quadrat zu verwenden ist.

Wendet man diese Schritte auf das rechte Muster an, erhält man nacheinander:

- Bereinigung der Ecken:

0	1	1	0
2	7	7	1
2	10	8	1
0	3	3	0

- Bereinigung der äußeren Kanten:

0	0	0	0
0	4	5	0
0	5	4	0
0	0	0	0

- Jetzt kann nur noch das mittlere 2×2-Quadrat verwendet werden. Da aber die Zahlen in diesem Bereich nicht alle gleich sind, kann die Null-Konfiguration nicht erreicht werden.

Alternativ kann man so argumentieren, dass die rechte Konfiguration unmöglich ist: Bei jedem Schritt wird die Gesamtsumme aller 16 Zahlen um 4 verändert; ausgehend von der Null-Konfiguration erhält man stets Summen, die durch 4 teilbar sind. Bei dem rechten Muster ist die Summe aller 16 Zahlen jedoch 86.

(b) Die Antwort lautet ja. Eine Konstruktionsmöglichkeit geht so:

Zunächst benutzen wir die 2×2-Eckbereiche, um Folgendes zu erzielen:

1	1	3	3
1	1	3	3
5	5	7	7
5	5	7	7

Dann kommt je einmal das mittlere obere und untere Teilquadrat hinzu und je achtmal das mittlere linke und rechte Teilquadrat:

1	2	4	3
9	10	12	11
13	14	16	15
5	6	8	7

(c) Wieder lautet die Antwort ja. Dazu teile man die große Tafel in kleine 4×4-Tafeln, die gemäß (b) mit den Zahlen von 1 bis 16 gefüllt werden. (Das ist möglich, da 2016 durch 4 teilbar ist.) Beachte nun, dass in 4 Schritten alle Zahlen in einem 4×4-Quadrat um 1 erhöht werden können, in $16 \cdot 4 = 64$ Schritten also um 16. Damit kann aus jedem mit 1 bis 16 gefüllten 16-er

Block ein mit 17 bis 32 gefüllter gemacht werden, ein solcher zu einem mit 33 bis 48 gefüllter Block usw.

Dieser Prozess führt nicht nur bei 2016×2016 zum Erfolg, sondern stets bei $n \times n$-Tafeln, wenn n durch 4 teilbar ist.

(d) Hier lautet die Antwort in beiden Fällen nein. Der Grund ist, dass, wie am Ende der Lösung von (a) bemerkt, die Gesamtsumme der Zahlen bei einer möglichen Konfiguration notwendig durch 4 teilbar sein muss. Wir werden also begründen, dass weder $1 + 2 + 3 + \cdots + 2015^2$ noch $1 + 2 + 3 + \cdots + 2014^2$ durch 4 teilbar sind.

Die erste Summe enthält ungerade viele ungerade Summanden (beachte, dass 2015^2 ungerade ist), ist also ungerade.

Die zweite Summe teilen wir in Teilsummen der Länge 8 auf. Die Summe der ersten 8 Zahlen ist $1+2+\cdots+8 = 36$, also durch 4 teilbar. Die nächsten 8 Zahlen sind jeweils um 8 größer, also ist ihre Summe $9+10+\cdots+16 = 8\cdot 8+36$ auch durch 4 teilbar. Dasselbe gilt für jede 8er-Teilsumme, die folgt. Nun ist $2014^2 = (2 \cdot 1007)^2 = 4 \cdot 1007^2$ das Vierfache des Quadrats einer ungeraden Zahl, also von der Form $4(2k+1)^2 = 4(4k^2+4k+1) = 16(k^2+k)+4$ und lässt bei der Division durch 8 den Rest 4. Daher sind die letzten 4 Zahlen der Summe $1 + 2 + 3 + \cdots + 2014^2$ nicht von den 8er-Teilsummen erfasst. Ihre Summe ist $2014^2 + (2014^2 - 1) + (2014^2 - 2) + (2014^2 - 3) = 4 \cdot 2014^2 - 6$, und das ist nicht durch 4 teilbar. Daher ist auch $1 + 2 + 3 + \cdots + 2014^2$ nicht durch 4 teilbar.

Wer die Formel für die Summe der ersten N natürlichen Zahlen kennt, nämlich (vgl. $(*)$ in Aufgabe 1)

$$1 + 2 + \cdots + N = \frac{N(N+1)}{2},$$

kann auch so argumentieren:

$$1 + 2 + \cdots + 2014^2 = \frac{2014^2 \cdot (2014^2+1)}{2} = 1007 \cdot 2014 \cdot (2014^2+1) = 2 \cdot 1007^2 \cdot (2014^2+1)$$

ist das Doppelte einer ungerade Zahl, also nicht durch 4 teilbar;

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + 2015^2 &= \frac{2015^2 \cdot (2015^2+1)}{2} = \frac{2015^2 \cdot ((2014+1)^2+1)}{2} \\ &= \frac{2015^2 \cdot (2014^2 + 4028 + 1 + 1)}{2} = \frac{2015^2 \cdot (2014^2 + 4030)}{2} \\ &= 2015^2 \cdot (1007 \cdot 2014 + 2015) \end{aligned}$$

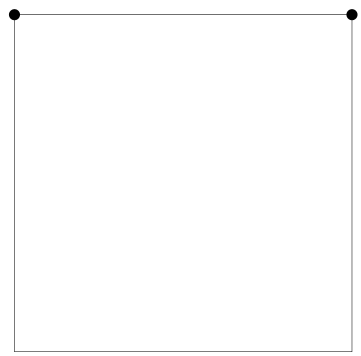
ist eine ungerade Zahl.

Aufgabe 3 Ein Quadrat der Seitenlänge 1 werde in drei Teilmengen zerlegt. (Unter einem Quadrat verstehen wir eine quadratische Fläche einschließlich des Randes.)

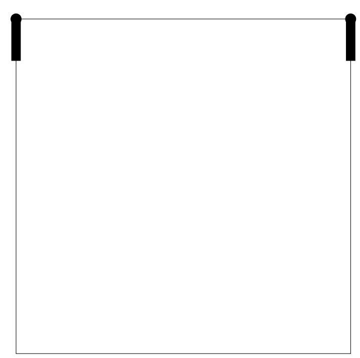
(a) Zeigt, dass eine dieser Teilmengen zwei Punkte enthält, deren Abstand ≥ 1 ist.

(b) Zeigt, dass eine dieser Teilmengen zwei Punkte enthält, deren Abstand sogar > 1 ist.

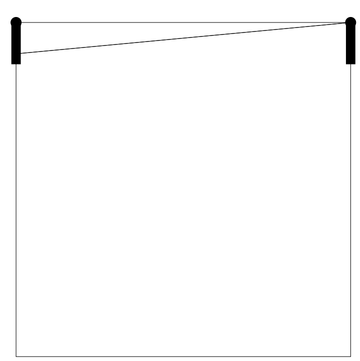
Lösung. Es gibt vier Eckpunkte und drei Teilmengen; also müssen zwei Eckpunkte in einer gemeinsamen Teilmenge liegen. Da zwei benachbarte Eckpunkte den Abstand 1 und zwei auf einer Diagonalen gegenüberliegende Eckpunkte den Abstand $\sqrt{2}$ haben, haben wir Teil (a) gezeigt und im „Diagonalfall" auch Teil (b). Es bleibt für (b) der Fall zu betrachten, dass zwei benachbarte Eckpunkte der gleichen Teilmenge angehören (nennen wir sie X):



Wir betrachten Strecken unterhalb dieser Eckpunkte der Länge 0.1:



Enthält eine dieser Strecken Punkte aus X, können wir ein rechtwinkliges Dreieck mit Eckpunkten in X bilden, wovon eine Kathete die Länge 1 hat:



Die Hypotenuse ist dann länger als 1, und wir haben zwei Punkte aus X im Abstand > 1 gefunden.

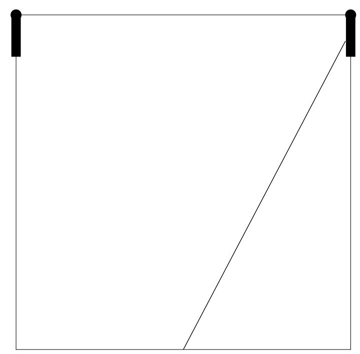
Es bleibt der Fall, dass diese Strecken mit Ausnahme des jeweils oberen Eckpunkts nur Punkte aus den anderen Teilmengen Y oder Z enthalten. Falls beide Strecken nur Y-Punkte oder beide

Strecken nur Z-Punkte enthalten, können wir wieder ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse > 1 konstruieren, dessen sämtliche Eckpunkte in Y (bzw. in Z) liegen.

Jetzt bleibt nur noch der Fall, dass sowohl Punkte aus Y als auch Punkte aus Z auf den beiden Strecken liegen. Betrachte den Mittelpunkt M der unteren Seite. Falls $M \in X$, verbinde M mit einem der oberen Eckpunkte, und nach dem Satz von Pythagoras haben diese Punkte einen Abstand

$$d = \sqrt{1^2 + (1/2)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1.$$

Falls $M \in Y$ (bzw. $M \in Z$), verbinde M mit einem der in Y (bzw. in Z) liegenden Punkte der betrachteten Strecken.



Nach dem Satz von Pythagoras haben diese Punkte einen Abstand

$$d \geq \sqrt{0.9^2 + (1/2)^2} = \sqrt{1.06} > 1.$$

Aufgabe 4 Die Veranstalter des Berliner Marathons möchten Rücksicht darauf nehmen, dass einige der teilnehmenden Läufer abergläubisch sind, und schließen daher neben der Startnummer 13 auch alle Nummern aus, die das 13-fache ihrer Quersumme sind.
Gebt all positiven ganzen Zahlen an, die neben der 13 ebenfalls nicht zur Verfügung stehen.

Lösung. Es stehen außer der 13 nur 117, 156 und 195 nicht zur Verfügung. Begründung:

Es ist klar, dass keine einstellige Zahl ausgeschlossen wird. Für eine zweistellige Zahl x_1x_0 mit den Ziffern x_1 und x_0, die nicht benutzt werden soll, müsste $10x_1 + x_0 = 13(x_1 + x_0)$ gelten, sprich: $3x_1 + 12x_0 = 0$. Wegen $x_1 > 0$ und $x_0 \geq 0$ ist dies unmöglich.

Ist $x_2x_1x_0$ eine dreistellige auszuschließende Zahl, so muss $100x_2 + 10x_1 + x_0 = 13(x_2 + x_1 + x_0)$ sein bzw. $87x_2 = 3x_1 + 12x_0$. Mit anderen Worten: $29x_2 = x_1 + 4x_0$. Da aber $x_1 + 4x_0 \leq 9 + 4 \cdot 9 = 45$ ist, können wir schlussfolgern, dass $x_2 = 1$ sein muss. Die Gleichung $29 = x_1 + 4x_0$ hat genau die Lösungen $x_1 = 1$, $x_0 = 7$ bzw. $x_1 = 5$, $x_0 = 6$ bzw. $x_1 = 9$, $x_0 = 5$; beachte, dass $29 - x_1$ durch 4 teilbar ist. Also werden von den dreistelligen Zahlen nur 117, 156 und 195 nicht vergeben.

Ist nun $x_n \dots x_2x_1x_0$ eine mindestens vierstellige Zahl, die ausgeschlossen werden müsste, so wäre $10^n x_n + \ldots + 100x_2 + 10x_1 + x_0 = 13(x_n + \ldots + x_2 + x_1 + x_0)$. Die linke Seite ist mindestens 10^n, die rechte höchstens $13 \cdot 9 \cdot (n+1) = 117 \cdot (n+1)$, und das ist kleiner als 10^n für $n \geq 3$. Also werden keine weiteren Zahlen ausgeschlossen.